# Probabilités

# Problème

Sont particulièrement abordés dans cette fiche :

- **Exercice 1 :** espérance mathématique, variable aléatoire, loi de probabilité, calculs de probabilités, variance, écart-type

Le problème proposé ci-après est un exercice de synthèse sur les probabilités

## Exercice 1 *(2 questions)* — *Niveau : difficile*

Une urne contient trois boules vertes portant chacune le numéro 0, deux boules rouges portant chacune le numéro 5 et une boule bleue portant le numéro $a$ tel que $a \in \mathbb{N} - \{0 ; 5 ; 10\}$. On tire au hasard, successivement et avec remise, deux boules de l'urne. La variable aléatoire $X$ associe à chaque issue la somme des numéros sortis.

Calculer $a$ pour que l'espérance de $X$ soit égale à 6 puis déterminer, pour cette valeur de $a$, l'écart-type de $X$.

## Correction de l'exercice 1

Une urne contient trois boules vertes, que nous noterons $V_1$, $V_2$ et $V_3$, deux boules rouges, que nous noterons $R_1$ et $R_2$, et une boule bleue, notée $B$. L'**expérience** consiste à tirer au hasard, successivement et avec remise, deux boules de l'urne. Les **issues** sont donc supposées **équiprobables**, aucune boule n'étant discernable au toucher et aucun tirage de boule n'étant dépendant du tirage précédent.

- A l'aide d'un tableau à double entrée, précisons tout d'abord les différentes **issues possibles**.

| 1$^{\text{ère}}$ boule \ 2$^{\text{e}}$ boule | $V_1$ | $V_2$ | $V_3$ | $R_1$ | $R_2$ | $B$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $V_1$ | $V_1V_1$ | $V_1V_2$ | $V_1V_3$ | $V_1R_1$ | $V_1R_2$ | $V_1B$ |
| $V_2$ | $V_2V_1$ | $V_2V_2$ | $V_2V_3$ | $V_2R_1$ | $V_2R_2$ | $V_2B$ |
| $V_3$ | $V_3V_1$ | $V_3V_2$ | $V_3V_3$ | $V_3R_1$ | $V_3R_2$ | $V_3B$ |
| $R_1$ | $R_1V_1$ | $R_1V_2$ | $R_1V_3$ | $R_1R_1$ | $R_1R_2$ | $R_1B$ |
| $R_2$ | $R_2V_1$ | $R_2V_2$ | $R_2V_3$ | $R_2R_1$ | $R_2R_2$ | $R_2B$ |
| $B$ | $BV_1$ | $BV_2$ | $BV_3$ | $BR_1$ | $BR_2$ | $BB$ |

On dénombre ainsi 36 issues possibles, toutes équiprobables.

**Rappel : Expérience, issue et univers**

Une **expérience aléatoire** est une expérience pour laquelle plusieurs issues sont possibles, sans qu'il soit possible de prévoir celle qui se produira. Les **issues** sont aussi appelées **événements élémentaires** ou plus rarement éventualités. L'ensemble de toutes les éventualités possibles s'appelle l'**univers**.

- Calculons désormais la **probabilité** d'obtenir deux boules vertes, puis celle d'obtenir deux boules rouges et celle d'obtenir deux boules bleues.

La probabilité d'obtenir deux boules vertes est de $\frac{9}{36} = \frac{1}{4}$. En effet, on dénombre 9 cas favorables à la réalisation de l'événement « obtenir deux boules vertes ».

| 2^e boule / 1^ère boule | $V_1$ | $V_2$ | $V_3$ | $R_1$ | $R_2$ | $B$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $V_1$ | $V_1V_1$ | $V_1V_2$ | $V_1V_3$ | $V_1R_1$ | $V_1R_2$ | $V_1B$ |
| $V_2$ | $V_2V_1$ | $V_2V_2$ | $V_2V_3$ | $V_2R_1$ | $V_2R_2$ | $V_2B$ |
| $V_3$ | $V_3V_1$ | $V_3V_2$ | $V_3V_3$ | $V_3R_1$ | $V_3R_2$ | $V_3B$ |
| $R_1$ | $R_1V_1$ | $R_1V_2$ | $R_1V_3$ | $R_1R_1$ | $R_1R_2$ | $R_1B$ |
| $R_2$ | $R_2V_1$ | $R_2V_2$ | $R_2V_3$ | $R_2R_1$ | $R_2R_2$ | $R_2B$ |
| $B$ | $BV_1$ | $BV_2$ | $BV_3$ | $BR_1$ | $BR_2$ | $BB$ |

La probabilité d'obtenir deux boules rouges est de $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$. En effet, on dénombre 4 cas favorables à la réalisation de l'événement « obtenir deux boules rouges ».

La probabilité d'obtenir deux boules bleues est de $\frac{1}{36}$. En effet, on dénombre 1 cas favorable à la réalisation de l'événement « obtenir deux boules bleues ».

**Rappel : Probabilité d'un événement en situation d'équiprobabilité**

Lors d'une expérience aléatoire dont les issues sont équiprobables, la probabilité d'un événement quelconque $A$ d'un univers $\Omega$ est égale à :

$$p(A) = \frac{nombre\ d'issues\ favorables\ à\ la\ réalisation\ de\ l'événement A}{nombre\ total\ d'issues} = \frac{card(A)}{card(\Omega)}$$

où $card(A)$ désigne le nombre d'éventualités qui constituent $A$ et $card(\Omega)$ le nombre d'événements élémentaires qui constituent l'univers $\Omega$.

- Déterminons désormais les différentes **probabilités** d'obtenir deux couleurs différentes.

| 1ère boule \ 2e boule | $V_1$ | $V_2$ | $V_3$ | $R_1$ | $R_2$ | $B$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $V_1$ | $V_1V_1$ | $V_1V_2$ | $V_1V_3$ | $V_1R_1$ | $V_1R_2$ | $V_1B$ |
| $V_2$ | $V_2V_1$ | $V_2V_2$ | $V_2V_3$ | $V_2R_1$ | $V_2R_2$ | $V_2B$ |
| $V_3$ | $V_3V_1$ | $V_3V_2$ | $V_3V_3$ | $V_3R_1$ | $V_3R_2$ | $V_3B$ |
| $R_1$ | $R_1V_1$ | $R_1V_2$ | $R_1V_3$ | $R_1R_1$ | $R_1R_2$ | $R_1B$ |
| $R_2$ | $R_2V_1$ | $R_2V_2$ | $R_2V_3$ | $R_2R_1$ | $R_2R_2$ | $R_2B$ |
| $B$ | $BV_1$ | $BV_2$ | $BV_3$ | $BR_1$ | $BR_2$ | $BB$ |

La probabilité d'obtenir une boule verte et une boule rouge est de $\frac{12}{36} = \frac{1}{3}$.

La probabilité d'obtenir une boule verte et une boule bleue est de $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

La probabilité d'obtenir une boule rouge et une boule bleue est de $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.

- La **variable aléatoire** $X$ associe à chaque issue la somme des numéros sortis, sachant que chaque boule verte porte le numéro 0, que chaque boule rouge porte le numéro 5 et que la boule bleue porte le numéro $a$ ($a \in \mathbb{N} - \{0\,;5\,;10\}$).

$X$ peut donc prendre plusieurs valeurs :

0 lorsque les deux boules sont vertes (0+0)

5 lorsqu'une boule est verte et l'autre rouge (0+5)

10 lorsque les deux boules sont rouges (5+5)

$a$ lorsqu'une boule est verte et l'autre bleue (0+$a$)

$a+5$ lorsqu'une boule est rouge et l'autre bleue

$2a$ lorsque les deux boules sont bleues ($a+a$)

- La **loi de probabilité** de la variable aléatoire $X$ est donnée par le tableau :

| $x$ | 0 | 5 | 10 | $a$ | $a+5$ | $2a$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $p(X=x)$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{36}$ |

**Rappel : Définition d'une loi de probabilité**

Définir une **loi de probabilité** sur un univers Ω, c'est donner la probabilité de chaque événement élémentaire constituant Ω, c'est-à-dire associer à chaque éventualité $x_i$ un nombre $p_i$ tel que chaque $p_i$ est compris entre 0 et 1 et tel que la somme de tous les $p_i$ est égale à 1 ($0 \leq p_i \leq 1$ et $\sum p_i = 1$)

**Remarque :** Ici, il s'agit de déterminer les différentes sommes possibles obtenues après le tirage successif (avec remise) des deux boules.

- Ainsi, l'**espérance mathématique** $E(X)$ de la variable $X$ est :

$$E(X) = p(X=0)\times 0 + p(X=5)\times 5 + p(X=10)\times 10 + p(X=a)\times a + p\big(X=(a+5)\big)\times(a+5)$$

$$+p(X=2a)\times 2a = \frac{1}{4}\times 0 + \frac{1}{3}\times 5 + \frac{1}{9}\times 10 + \frac{1}{6}\times a + \frac{1}{9}\times(a+5) + \frac{1}{36}\times 2a = \frac{5}{3} + \frac{10}{9} + \frac{a}{6} + \frac{a}{9} + \frac{5}{9} + \frac{a}{18}$$

$$= \frac{30}{9} + \frac{6a}{18} = \frac{10}{3} + \frac{a}{3} = \frac{10+a}{3}$$

On souhaite que l'espérance mathématique de $X$ soit égale à 6 ; ce qui revient à résoudre l'équation $E(X) = 6$ :

$$E(X) = 6 \Leftrightarrow \frac{10+a}{3} = 6 \Leftrightarrow 10 + a = 18 \Leftrightarrow a = 8$$

**Rappel : Espérance mathématique d'une variable aléatoire X**

Soit une expérience dont l'univers des éventualités est $\Omega = \{x_1\ ;\ x_2\ ; \dots ;\ x_n\}$ où les $x_i$ sont des réels et la loi de probabilité est définie par $p(X = x_i) = p_i$. L'**espérance mathématique** $E(X)$ de la variable aléatoire $X$ (respectivement l'espérance mathématique de sa loi de probabilité) est :

$$E(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \dots + x_np_n = \sum_{i=1}^{n}(p_ix_i)$$

$\boxed{\text{Si } a = 8, \text{ alors l'espérance mathématique de la variable aléatoire } X \text{ est égale à } 6}$.

- Calculons enfin l'écart-type, noté $\sigma(X)$, de $X$ lorsque $a = 8$.

On a remplacé $a$ par sa valeur dans le tableau.

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ où $V(X)$ désigne la variance de X

| $x$ | 0 | 5 | 10 | 8 | 13 | 16 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $p(X=x)$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{36}$ |

**Rappel : Variance et écart-type**

La **variance** $V(X)$ de la variable aléatoire $X$ (respectivement la variance de sa loi de probabilité) est :

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n}(p_ix_i^{\,2}) - (E(X))^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i(x_i - E(X))^2$$

L'**écart-type** $\sigma(X)$ de la variable aléatoire $X$ (respectivement l'écart-type de sa loi de probabilité) est :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Or, $V(X) = p(X=0)\times 0^2 + p(X=5)\times 5^2 + p(X=10)\times 10^2 + p(X=8)\times 8^2 + p(X=13)\times 13^2$

$+p(X=16)\times 16^2 - (E(X))^2$

$$= \frac{1}{4} \times 0^2 + \frac{1}{3} \times 5^2 + \frac{1}{9} \times 10^2 + \frac{1}{6} \times 8^2 + \frac{1}{9} \times 13^2 + \frac{1}{36} \times 16^2 - 6^2 = 20$$

Ainsi, $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \simeq 4,47$ (arrondi à $10^{-2}$ près par défaut)

$\boxed{\text{Lorsque l'espérance mathématique de } X \text{ est égale à 6, l'écart-type de } X \text{ avoisine } 4,47}$.

**Résumé – Point méthode :** Pour résoudre un tel problème et utiliser les bonnes méthodes de résolution, il convient de se poser les bonnes questions en analysant les termes de l'énoncé :

- espérance mathématique $\Longrightarrow$ loi de probabilité $\Longrightarrow$ variable aléatoire $\Longrightarrow$ calculs de probabilités $\Longrightarrow$ étude des différentes issues, en tenant compte des notions de hasard ($\Longrightarrow$ équiprobabilité) et de remise ($\Longrightarrow$ événements indépendants)
- écart-type $\Longrightarrow$ variance $\Longrightarrow$ loi de probabilité…