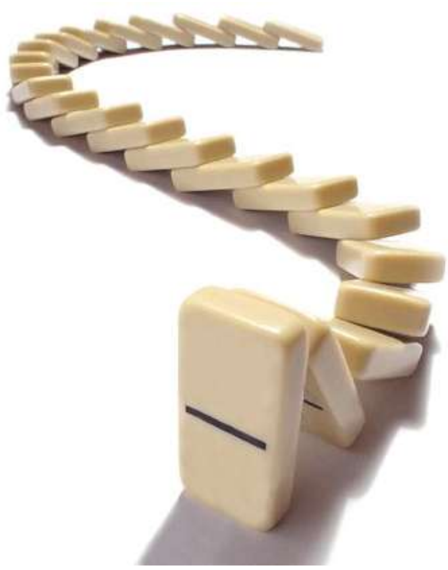
Raisonnement par récurrence et inégalité de Bernoulli

Exercice corrigé

Introduction



Imageons le principe du raisonnement par récurrence par la chute d'une suite de dominos, deux à deux régulièrement espacés.

Si un premier domino tombe alors le domino suivant tombera et, par propagation en chaîne, tous les dominos suivants tomberont.

Le raisonnement par récurrence comporte deux phases successives :

1) prouver qu'un premier domino n_0 tombe (initialisation)
2) établir que, si le $n^{ème}$ domino tombe, alors le domino suivant, c'est-à-dire le $(n+1)^{ème}$ domino, tombera (hérédité)

Rappel : Principe du raisonnement par récurrence

Une **proposition** est un énoncé, soit vrai, soit faux.

Soit $\wp$ une proposition définie sur un intervalle I de $\mathbb{N}$. Soit $n_0 \in I$.

Si :

1) la proposition $\wp$ est **initialisée** à un certain rang n_0, c'est-à-dire si $\wp(n_0)$ est vraie au rang n_0
2) la proposition $\wp$ est **héréditaire** à partir du rang n_0, c'est-à-dire si, pour tout $n \in I$ tel que $n \geq n_0$, on a l'implication $\wp(n) \Rightarrow \wp(n+1)$

Alors :

3) La proposition est vraie à partir de tout rang plus grand que n_0.

On vérifie que $\wp(n_0)$ est vraie

On suppose que $\wp(n)$ est vraie

On vérifie alors que $\wp(n+1)$ est vraie

On conclut que, pour tout entier naturel $n \geq n_0$, $\wp(n)$ est vraie

rang n_0 — rang n — rang $n+1$

1ère étape	2ème étape	3ème étape
Initialisation	Hérédité	Conclusion

Exercice 1 *(1 question)* — *Niveau : facile*

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n et tout réel x strictement positif, $(1+x)^n \geq 1+nx$.

Remarque : Cette inégalité est appelée l'inégalité de Bernoulli.

Correction de l'exercice 1

Soit la proposition : pour tout entier naturel n et tout réel x strictement positif, $(1+x)^{n} \geq 1+nx$.

1) Initialisation :

D'une part, on a $(1+x)^{0} = 1$. En effet, pour tout $X \in \mathbb{R},\ X^0 = 1$.

D'autre part, on a $1+0x = 1$.

L'inégalité $(1+x)^{0} \geq 1+0x$ est bien vérifiée pour $n=0$. Autrement dit, $\wp(0)$ est vraie. La proposition est initialisée au rang 0.

2) Hérédité :

Supposons que $\wp(n)$ est vraie, c'est-à-dire supposons que $\overbrace{(1+x)^{n} \geq 1+nx}^{\text{hypothèse de récurrence}}$, et montrons alors que $\wp(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire montrons que $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$, pour tout x réel strictement positif.

$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x)$

Or, d'après l'hypothèse de récurrence, $(1+x)^n \geq 1+nx$, donc $(1+x)^{n+1} \geq (1+nx)(1+x)$

De plus, $(1+nx)(1+x) = 1+x+nx+nx^2 = 1+nx+1x+nx^2 = 1+(n+1)x+nx^2$

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, comme $n \in \mathbb{N}$, $nx^2 \geq 0$ donc $1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x$

Il en résulte que $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x$, c'est-à-dire $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$. $\wp(n+1)$ est donc vraie.

On vient donc de montrer que, si $\wp(n)$ est vraie, alors $\wp(n+1)$ est vraie. La proposition est par conséquent héréditaire.

3) Conclusion :

On vient d'établir que $\wp(0)$ est vraie et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\wp(n) \Rightarrow \wp(n+1)$. Autrement dit, la proposition $\wp$ est initialisée au rang 0 et est héréditaire donc, d'après le principe du raisonnement par récurrence, la proposition $\wp$ est vraie pour tout entier naturel n. En définitive, on a : $(1+x)^n \geq 1+nx$.