Ensembles de définition et parité – Exercice corrigé

Seconde (2^{nde})

Exercice 1 *(2 questions)* — *Niveau : difficile*

Déterminer l'ensemble de définition des quatre fonctions suivantes et étudier leur parité :

$$f_1 : x \longmapsto \frac{x^3+x}{x^2-1} \qquad f_2 : x \longmapsto \frac{x^2-4}{|x|-2} \qquad f_3 : x \longmapsto \sqrt{x^2-9} \qquad f_4 : x \longmapsto \sqrt{\frac{x-3}{x+1}}$$

Correction de l'exercice 1

1- Etudions l'ensemble de définition, puis la parité de la fonction f_1 définie par :

$$f_1(x) = \frac{x^3+x}{x^2-1}$$

- La fonction f_1 est une **fonction rationnelle**, définie si et seulement si son dénominateur x^2-1 est non nul. Résolvons donc $x^2-1=0$ pour identifier les valeurs interdites.

On ne peut jamais diviser par 0 !

$x^2-1=0 \Leftrightarrow x^2-1^2=0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1)=0 \Leftrightarrow x-1=0 \text{ ou } x+1=0$

$\Leftrightarrow x=1 \text{ ou } x=-1$

On en déduit D_{f_1}, l'ensemble de définition de f_1 :

$D_{f_1} = \mathbb{R}\backslash\{-1\,;1\} =]-\infty\,;\,-1[\,\cup\,]-1\,;1[\,\cup\,]1\,;\,+\infty[$

- D_{f_1} est symétrique par rapport à 0. Calculons de ce fait $f_1(-x)$.

Pour tout $x \in D_{f_1}$,

$$f_1(-x) = \frac{(-x)^3+(-x)}{(-x)^2-1} = \frac{-x^3-x}{x^2-1} = \frac{-(x^3+x)}{x^2-1} = -\frac{x^3+x}{x^2-1} = -f_1(x)$$

Pour tout $x \in D_{f_1}$, $f_1(-x) = -f_1(x)$; il en résulte que la fonction f_1 est impaire.

Rappel : Une fonction est **impaire** ssi :

- l'ensemble de définition est symétrique par rapport à l'origine
- pour tout x de D_f, $f(-x) = -f(x)$

2- Etudions l'ensemble de définition, puis la parité de la fonction f_2 définie par :

$$f_2(x) = \frac{x^2 - 4}{|x| - 2}$$

- La fonction f_2 est une **fonction rationnelle**, définie si et seulement si son dénominateur $|x| - 2$ est non nul. Résolvons donc $|x| - 2 = 0$ pour identifier les valeurs interdites.

$|x| - 2 = 0 \Leftrightarrow |x| = 2 \Leftrightarrow x = 2 \ ou \ x = -2$

$|x|$ désigne la **valeur absolue** de x. L'équation $|x| = a$ admet deux solutions : $-a$ et a (si $a > 0$), la solution 0 si $a = 0$ et aucune solution sinon.

On en déduit D_{f_2}, l'ensemble de définition de f_2 :

$D_{f_2} = \mathbb{R}\backslash\{-2\,;2\} =]-\infty\,;\,-2[\, \cup\,]-2\,;2[\, \cup\,]2\,;\,+\infty[$

- D_{f_2} est symétrique par rapport à 0. Calculons de ce fait $f_2(-x)$.

Pour tout $x \in D_{f_2}$,

$$f_2(-x) = \frac{(-x)^2 - 4}{|-x| - 2} = \frac{x^2 - 4}{|x| - 2} = f_2(x)$$

$f_2(-x) = f_2(x)$; ainsi, la fonction est paire.

Rappel : Une fonction est **paire** ssi :

- l'ensemble de définition est symétrique par rapport à l'origine
- pour tout x de D_f, $f(-x) = f(x)$

3- Etudions l'ensemble de définition, puis la parité de la fonction f_3 définie par $f_3(x) = \sqrt{x^2 - 9}$.

- La fonction f_3 est définie si et seulement si son **radicande** $x^2 - 9$ est positif ou nul. Résolvons donc $x^2 - 9 \geq 0$ pour identifier les valeurs autorisées.

Rappel : On appelle **radicande** le nombre présent sous le symbole de la racine carrée $\sqrt{\ }$.

$x^2 - 9 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 3^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+3) \geq 0$: application de l'identité remarquable vue en 3ème $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

Dressons un tableau de signes du produit $(x-3)(x+3)$.

Toujours ordonner les valeurs dans l'ordre croissant !

x	$-\infty$		-3		3		$+\infty$
$x-3$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$x+3$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$(x-3)(x+3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

L'expression $x^2 - 9$ devant être positive ou nulle, on en déduit D_{f_3}, l'ensemble de définition de f_3 :

$D_{f_3} =]\infty\,;\, -3] \cup [3\,;\, +\infty[$

- D_{f_3} est symétrique par rapport à 0. Calculons de ce fait $f_3(-x)$.

Pour tout $x \in D_{f_3}$,

$f_3(-x) = \sqrt{(-x)^2 - 9} = \sqrt{x^2 - 9} = f_1(x)$

$f_3(-x) = f_3(x)$; il en résulte que la fonction est paire.

4- Etudions l'ensemble de définition, puis la parité de la fonction f_4 définie par :

$$f_4(x) = \sqrt{\frac{x-3}{x+1}}$$

- La fonction f_4 est définie si et seulement si son radicande $\frac{x-3}{x+1}$ est positif ou nul et si et seulement si le dénominateur du radicande $x+1$ est non nul.

Dressons un tableau de signes du quotient $\frac{x-3}{x+1}$.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$x-3$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$\frac{x-3}{x+1}$		$+$	‖	$-$	0	$+$	

Remarque : La double barre indique que la valeur -1 est interdite, le dénominateur du radicande ne devant pas être nul.

On en déduit D_{f_4}, l'ensemble de définition de f_4 :

$D_{f_4} =]-\infty\,;\, -1[\cup [3\,;\, +\infty[$

- D_{f_4} n'est pas symétrique par rapport à 0 car $-1 \notin D_{f_4}$ alors que $1 \in D_{f_4}$.

La fonction n'est par conséquent ni paire ni impaire.