Nombres complexes – Exercices corrigés

Terminale S (T^{ale} S)

Exercice 1 *(2 questions)* — *Niveau : facile*

L'objectif de cet exercice est de résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) suivante :

$z^4 - 4z^3 + 14z^2 - 36z + 45 = 0$

1- Démontrer qu'il existe des réels a, b et c tels que, pour tout complexe z :

$z^4 - 4z^3 + 14z^2 - 36z + 45 = (z^2 + 9)(az^2 + bz + c)$

2- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

Exercice 2 *(1 question)* — *Niveau : moyen*

Déterminer la nature des trois transformations complexes suivantes :

$f_1 : z \mapsto z - 1 + 3i$ $\quad$ $f_2 : z \mapsto iz + 1 - i$ $\quad$ $f_3 : z \mapsto -3z + 4 - 8i$

Correction de l'exercice 1

Soit l'équation (E) : $z^4 - 4z^3 + 14z^2 - 36z + 45 = 0$

1- Pour tout complexe z :

$(z^2 + 9)(az^2 + bz + c) = az^4 + bz^3 + cz^2 + 9az^2 + 9bz + 9c$

$= az^4 + bz^3 + (9a + c)z^2 + 9bz + 9c$

Les polynômes $z^4 - 4z^3 + 14z^2 - 36z + 45$ et $(z^2 + 9)(az^2 + bz + c)$ sont égaux si et seulement si leurs coefficients sont égaux. D'où le système suivant à résoudre :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \\ 9a + c = 14 \\ 9b = -36 \\ 9c = 45 \end{cases}$$

C'est-à-dire :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \\ c = 5 \end{cases}$$

Ainsi, pour tout complexe z :

$$z^4-4z^3+14z^2-36z+45=(z^2+9)(z^2-4z+5)$$

2- D'après ce qui précède, $z^4-4z^3+14z^2-36z+45=(z^2+9)(z^2-4z+5)$

Donc :

$$z^4-4z^3+14z^2-36z+45=0 \Leftrightarrow (z^2+9)(z^2-4z+5)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} z^2+9=0 \\ ou \\ z^2-4z+5=0 \end{cases}$$

Or, pour tout $z \in \mathbb{C}$:

- $z^2+9=0 \Leftrightarrow z^2-(3i)^2=0 \Leftrightarrow (z-3i)(z+3i)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} z-3i=0 \\ ou \\ z+3i=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=3i \\ ou \\ z=-3i \end{cases}$
- En posant Δ le discriminant du trinôme z^2-4z+5,
  $\Delta=(-4)^2-4\times 1\times 5=-4=(2i)^2$
  Comme $\Delta<0$, alors le trinôme admet deux racines complexes distinctes :
  $$z_1=\frac{-(-4)-(2i)}{2\times 1}=\frac{4-2i}{2}=2-i$$
  $$z_2=\overline{z_1}=\overline{2-i}=2+i$$

Ainsi, l'équation (E) admet 4 racines complexes : $-3i$; $2-i$; $2+i$; $3i$.

Correction de l'exercice 2

Rappel de cours :

Soient M et M' deux points quelconques distincts du plan complexe.

- M' est l'image de M par la **translation** de vecteur $\vec{u}$ si et seulement si $\boldsymbol{z_{M'}=z_M+z_{\vec{u}}}$
- M' est l'image de M par la **rotation** de centre Ω et d'angle θ ssi $\boldsymbol{z_{M'}=e^{i\theta}(z_M-z_\Omega)+z_\Omega}$
- M' est l'image de M par l'**homothétie** de centre Ω et de rapport k (réel non nul) si et seulement si $\boldsymbol{z_{M'}=k(z_M-z_\Omega)+z_\Omega}$

1- L'application $f_1: z \mapsto z-1+3i$ est la **translation** de vecteur $\vec{u}(-1+3i)$

2- Recherchons le point fixe de la transformation $f_2: z \mapsto iz+1-i$.

$$f(z)=z \Leftrightarrow z=iz+1-i \Leftrightarrow z-iz=1-i \Leftrightarrow z(1-i)=1-i \Leftrightarrow z=1$$

On a donc :

$iz + 1 - i = i(z-1) + 1 = e^{\frac{i\pi}{2}}(z-1) + 1 = e^{\frac{i\pi}{2}}(z - z_\Omega) + z_\Omega$ avec $z_\Omega = 1$

Ainsi, l'application $f_2 : z \mapsto iz + 1 - i$ est la **rotation** de centre $\Omega(1)$ et d'angle $\frac{+\pi}{2}$.

3- Recherchons le point fixe de la transformation $f_3 : z \mapsto -3z + 4 - 8i$.

$f(z) = z \Leftrightarrow z = -3z + 4 - 8i \Leftrightarrow z + 3z = 4 - 8i \Leftrightarrow 4z = 4(1-2i) \Leftrightarrow z = 1 - 2i$

On a donc :

$-3z + 4 - 8i = -3(z - 1 + 2i) + 1 - 2i = -3\big(z - (1-2i)\big) + (1-2i)$

$= -3(z - z_\Omega) + z_\Omega$ avec $z_\Omega = 1 - 2i$

L'application $f_3 : z \mapsto -3z + 4 - 8i$ est par conséquent l'**homothétie** de centre $\Omega(1-2i)$ et de rapport -3.