Probabilités conditionnelles et suite géométrique

Exercice corrigé

Terminale

Exercice 1 ***(6 questions)*** ***Niveau : moyen***

Un élève possède depuis plusieurs mois un téléphone mobile pour lequel il a souscrit un forfait mensuel de deux heures. Soucieux de bien gérer ses dépenses, il étudie l'évolution de ses consommations.

Il a constaté que :

- si pendant le mois noté n il a dépassé son forfait, la probabilité qu'il le dépasse le mois suivant, noté $(n+1)$, est $1/5$
- si pendant le mois noté n il n'a pas dépassé son forfait, la probabilité qu'il le dépasse le mois suivant est $2/5$

Pour n entier naturel strictement positif, on désigne par :

- A_n l'événement : « L'élève a dépassé son forfait le mois n »
- B_n l'événement contraire

On pose $p_n = p(A_n)$ et $q_n = p(B_n)$; on a $p_1 = 1/2$.

Tous les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

1-
   a. Donner les probabilités de A_{n+1} sachant que A_n est réalisé et de A_{n+1} sachant que B_n est réalisé.
   b. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, les égalités suivantes sont vraies :
   $p(A_{n+1} \cap A_n) = p_n/5$ et $p(A_{n+1} \cap B_n) = 2q_n/5$
   En déduire que l'égalité suivante est vraie : $p_{n+1} = 2/5 - p_n/5$.

2- Pour tout entier naturel n non nul, on pose $u_n = p_n - 1/3$. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

3- Ecrire u_n puis p_n en fonction de n. Déterminer la limite de (p_n).

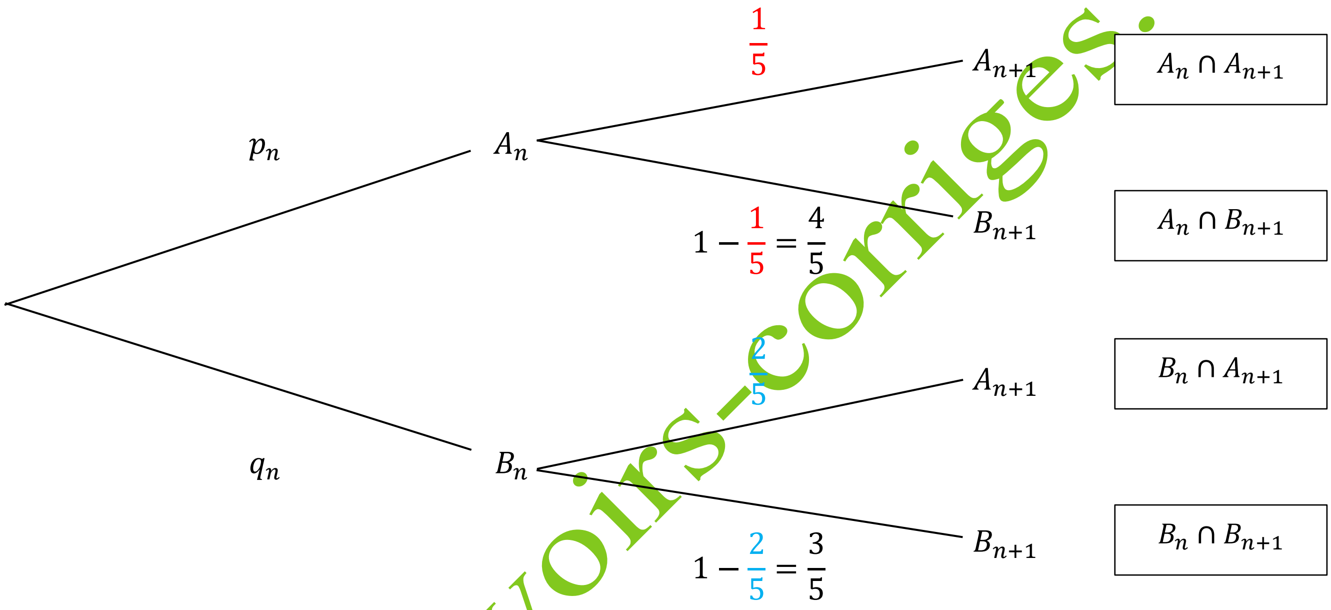
Correction de l'exercice 1

1-

a.

- Comme l'indique l'énoncé, si pendant le mois noté n l'élève a dépassé son forfait (événement A_n), la probabilité qu'il le dépasse le mois suivant (événement A_{n+1}) est $1/5$. Donc $p_{A_n}(A_{n+1}) = 1/5$.
- D'autre part, si pendant le mois noté n il n'a pas dépassé son forfait (événement B_n), la probabilité qu'il le dépasse le mois suivant (événement A_{n+1}) est $2/5$. Donc $p_{B_n}(A_{n+1}) = 2/5$.

Résumons désormais la situation à l'aide d'un arbre pondéré :



Rappel : Les probabilités conditionnelles

Soit p une probabilité sur un univers fini Ω. A et B sont deux événements de Ω et $p(A) \neq 0$. On appelle probabilité conditionnelle de l'événement B sachant que A est réalisé le réel noté :

$$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

Remarque : Cette égalité se note également $p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B)$. Pour calculer la probabilité de l'événement $A \cap B$, il convient de multiplier les probabilités le long des branches de l'**arbre pondéré**.

b. D'après la relation sur les **probabilités conditionnelles**, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

- D'une part :

$$p(A_n \cap A_{n+1}) = p(A_n) \times p_{A_n}(A_{n+1}) = p_n \times 1/5 = p_n/5$$

- D'autre part :

$$p(B_n \cap A_{n+1}) = p(B_n) \times p_{B_n}(A_{n+1}) = q_n \times 2/5 = 2q_n/5$$

Les égalités proposées sont par conséquent vérifiées.

Rappel : Formule des probabilités totales

Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ n événements de probabilités non nulles formant une partition de l'univers Ω. Soit B un événement quelconque contenu dans Ω. Alors :

$$p(B) = p(B \cap A_1) + p(B \cap A_2) + \cdots + p(B \cap A_n)$$

Enfin, comme l'exprime clairement l'énoncé, les événements A_n et B_n sont contraires ; par conséquent A_n et B_n forment une partition de l'univers. La **formule des probabilités totales** permet alors d'écrire :

$$p(A_{n+1}) = p(A_n \cap A_{n+1}) \cap p(B_n \cap A_{n+1}) = p_n/5 + 2q_n/5$$

Or, comme les événements A_n et B_n sont contraires, il résulte que :

$p(A_n) = 1 - p(B_n)$, c'est-à-dire : $p_n = 1 - q_n$ ou $q_n = 1 - p_n$.

Par conséquent,

$$p(A_{n+1}) = \frac{p_n}{5} + \frac{2q_n}{5} = \frac{p_n}{5} + \frac{2}{5}(1 - p_n) = \frac{p_n}{5} + \frac{2}{5} - \frac{2}{5}p_n = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}p_n$$

2- Soit, pour tout entier naturel n non nul, $u_n = p_n - 1/3$. Alors :

$$u_{n+1} = p_{n+1} - \frac{1}{3} = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}p_n - \frac{1}{3} = \frac{1}{15} - \frac{1}{5}p_n = -\frac{1}{5}\left(-\frac{1}{3} + p_n\right) = -\frac{1}{5}\left(p_n - \frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{5}u_n$$

Ainsi, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a :

$$u_{n+1} = -\frac{1}{5}u_n$$

Une **suite géométrique** (u_n) est définie par récurrence par $u_{n+1} = q \times u_n$ où q désigne la raison de la suite ($q \neq 0$).

Donc la suite (u_n) est géométrique de raison $-1/5$ et de premier terme u_1 tel que :

$$u_1 = p_1 - \frac{1}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

3- D'après ce qui précède, (u_n) est une suite géométrique de raison $-1/5$ et de premier terme $u_1 = 1/6$ donc le terme général de la suite s'écrit :

$$u_n = u_1 \times \left(\frac{-1}{5}\right)^{n-1} = \frac{1}{6} \times \left(\frac{-1}{5}\right)^{n-1}$$

Rappel : Si (u_n) est une **suite géométrique** de raison q non nulle alors, pour tous entiers naturels n et p : $u_n = u_p \times q^{n-p}$

En outre, pour tout entier naturel n non nul, $u_n = p_n - 1/3$. Donc :

$$p_n = u_n + \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \times \left(\frac{-1}{5}\right)^{n-1} + \frac{1}{3}$$

Rappel : Limite d'une suite géométrique

Soit (u_n) une **suite géométrique** de raison $q \in \mathbb{R}$ et de premier terme u_{n_0}.

- Si $q > 1$ et $u_{n_0} > 0$, alors
  $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$
- Si $q > 1$ et $u_{n_0} < 0$, alors
  $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$
- Si $0 < q < 1$ et u_{n_0} quelconque, alors
  $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$
- Si $q = 1$ et u_{n_0} quelconque, alors
  $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = u_{n_0}$
- Si $q = 0$ et u_{n_0} quelconque, alors
  $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$
- Si $q < 0$ et u_{n_0} quelconque, alors
  La suite (u_n) n'a pas de limite.

Déterminons désormais la limite de la suite (p_n).

$$-1 < \frac{-1}{5} < 1$$

Donc :

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{-1}{5}\right)^{n+1} = 0$$

D'où :

$$\lim_{n \to +\infty} p_n = \frac{1}{3}$$

Cette limite permet d'affirmer qu'au bout d'un certain temps, la probabilité que l'élève dépasse son forfait avoisine $1/3$. En d'autres termes, cet élève risque de dépasser son forfait en moyenne une fois tous les trois mois, c'est-à-dire trimestriellement.