Trigonométrie – Formulaire

Fiche récapitulative

Ensembles de définition

La fonction $x \longmapsto cos\, x$ est définie sur $\mathbb{R}$.

La fonction $x \longmapsto sin\, x$ est définie sur $\mathbb{R}$.

La fonction $x \longmapsto tan\, x$ est définie si et seulement si $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

ATTENTION ! Pour une meilleure lisibilité, la suite de cette fiche ne précise pas les intervalles de définition.

Relations fondamentales entre le cosinus, le sinus et la tangente d'un angle

$$cos^2(x) + sin^2(x) = 1$$

$$tan(x) = \frac{sin(x)}{cos(x)}$$

$$1 + tan^2(x) = \frac{1}{cos^2(x)}$$

Angles associés

$$cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -sin\,(x)$$

$$cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = sin\,(x)$$

$$cos(\pi + x) = -cos\,(x)$$

$$cos(\pi - x) = sin\,(x)$$

$$cos(-x) = cos\,(x)$$

La fonction $x \mapsto cos(x)$ est paire périodique de période 2π.

$$sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = cos\,(x)$$

$$sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = cos\,(x)$$

$$sin(\pi + x) = -sin\,(x)$$

$$sin(\pi - x) = sin\,(x)$$

$$sin(-x) = -sin\,(x)$$

La fonction $x \mapsto sin(x)$ est impaire et 2π-périodique.

Remarque : La fonction $x \mapsto tan(x)$ est impaire et π-périodique.

Formules d'addition et de différence

$$cos(a+b) = cos(a)\,cos(b) - sin(a)\,sin(b)$$

$$cos(a-b) = cos(a)\,cos(b) + sin(a)\,sin(b)$$

$$sin(a+b) = sin(a)\,cos(b) + \cos(a) sin(b)$$

$$sin(a-b) = sin(a)\,cos(b) - \cos(a) sin(b)$$

$$tan(a+b) = \frac{tan(a) + tan(b)}{1 - tan(a)\,tan(b)}$$

$$tan(a-b) = \frac{tan(a) - tan(b)}{1 + tan(a)\,tan(b)}$$

Formules de Simpson

Transformations de produits en sommes :

Transformations de sommes en produits :

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) + \cos(a+b)]$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a-b) + \sin(a+b)]$$

$$\cos a + \cos b = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\cos a - \cos b = -2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\sin a + \sin b = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\sin a - \sin b = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\tan a + \tan b = \frac{\sin(a+b)}{\cos a \cos b}$$

Formules de duplication et de triplication

$$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)$$

$$\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$$

$$\tan(2a) = \frac{2\tan(a)}{1 - \tan^2(a)}$$

$$\cos(3a) = 4\cos^3(a) - 3\cos(a)$$

$$\sin(3a) = 3\sin(a) - 4\sin^3(a)$$

$$\tan(3a) = \frac{3\tan(a) - \tan^3(a)}{1 - 3\tan^2(a)}$$

Pour connaître les autres formules de duplication, il faut utiliser la formule de Moivre.

Rappel : Formule de Moivre (Terminale)

Pour tout entier relatif n et pour tout réel θ, on a : $(\cos\theta + i\ \sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$

Formules de linéarisation

$$\cos^2(a) = \frac{1 + \cos(2a)}{2}$$

$$\sin^2(a) = \frac{1 - \cos(2a)}{2}$$

$$\tan^2(a) = \frac{1 - \cos(2a)}{1 + \cos(2a)}$$

$$\cos^3(a) = \frac{\cos(3a) + 3\cos(a)}{4}$$

$$\sin^3(a) = \frac{-\sin(3a) + 3\sin(a)}{4}$$

$$\tan^3(a) = \frac{-\sin(3a) + 3\sin(a)}{\cos(3a) + 3\cos(a)}$$

Pour connaître les autres formules de linéarisation, il faut utiliser les formules d'Euler et celle du binôme de Newton.

Formules d'Euler (Terminale)

Pour tout réel θ,

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \qquad \tan(\theta) = \frac{i(1 - e^{2i\theta})}{1 + e^{2i\theta}}$$

Formule du binôme de Newton (Terminale)

Pour tous réels a et b et pour tous entiers naturels k et n tels que $k \leq n$,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} a^k b^{n-k}$$

Résolutions d'équations trigonométriques

$$cos(x) = cos(y) \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 2k\pi \\ \quad \text{ou} \\ x = -y + 2k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \qquad sin(x) = sin(y) \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 2k\pi \\ \quad \text{ou} \\ x = \pi - y + 2k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

$$tan(x) = tan(y) \Leftrightarrow x = y + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

Théorème d'Al-Kashi (théorème de Pythagore généralisé)

Soit un triangle ABC quelconque. On note a, b et c les longueurs des côtés respectivement opposés aux angles α, β et γdu triangle. Alors :

$$a^2 = b^2 + c^2 - bc\cos\alpha \qquad b^2 = a^2 + c^2 - ac\cos\beta \qquad c^2 = a^2 + b^2 - ab\cos\gamma$$

Loi des sinus

Soit un triangle ABC quelconque. On note a, b et c les longueurs des côtés respectivement opposés aux angles α, β et γdu triangle. On note par ailleurs S l'aire du triangle et R le rayon du cercle circonscrit à ABC.

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = \frac{abc}{2S} = 2R$$

Valeurs remarquables

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	non défini	0